Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 1

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + 2x\dot{x}\dot{y})/2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 4$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x+3y = z-5 = 5$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном сдвиге параллельно прямой $x = y + z = -5$ на некоторое расстояние δL, сдвиге начала отсчета времени на $\delta L/2$ и повороте вокруг оси x на угол $2\delta L$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = 3x$. Укажите три пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения. Являются ли они независимыми?

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси x. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x$, $y' = y - 3t$, $z' = z + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 1/a^2x^2$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 2

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = (q_1^2 + \dot{q}_1{}^2 + q_1\dot{q}_1\dot{q}_2)/2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 1$, $\dot{q}_1(0) = 1$, $q_2(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2/x + \dot{y}\dot{z}/x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 2$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -2\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2} + 4x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно прямой $y = z = 0$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси y со скоростью 5 и параллельно прямой $x + y = z = 0$ со скоростью -2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} + (2, 1, 4)t)$. Укажите преобразование, не меняющее вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы вдоль направления $(2, 3, -1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^2/r^4 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x - 2t$, $y' = y$, $z' = z + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 4\dot{\varphi}\cos\theta$. Проверьте, что величина $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 2\mathbf{r}/r$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 3

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = x\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y}/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -5$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{z}e^x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2} + 2y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $x = y - 1 = 0$ со скоростью 2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси y с произвольной скоростью v и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $2v$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = eEx + mgz$. Укажите два пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при движении системы согласно уравнению $x + 2t = 1$, $z = 2 + t$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^3 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + 7t$, $y' = y + t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 2/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 2\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 4

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{z} + 3\sin x + \dot{x}^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = x^6\dot{x}^2 + 3x^2\dot{y}\dot{z}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - \dot{q}^2 - \dot{Q}^2} + 3Q$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x + 3z = y - 2 = 2$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $x + 2y = y + z = 1$ со скоростью 3 и вращении вокруг оси y с угловой скоростью 2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = \dot{\mathbf{r}}[\mathbf{A}\mathbf{r}]$, $\mathbf{A} = (0, 0, 2)$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно прямой $x + y = z = 2$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^5 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x - 4t$, $y' = y$, $z' = z + 10t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 4/x^4$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 5

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + q \sin q + \dot{q}\dot{Q}/4$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 1$, $Q(0) = 0$, $\dot{Q}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 2x^2\dot{y}\dot{z} + x^6\dot{x}^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{6 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} + z$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно прямой $x = z = 0$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси x со скоростью 2 и параллельно прямой $-x + z = 2y = 0$ со скоростью 10. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = 2 \sin x\dot{z}$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси y. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2/r^2 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + 2t$, $y' = y - 3t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - 8\dot{\varphi}\cos\theta$. Проверьте, что величина $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 4\mathbf{r}/r$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 6

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(\dot{x}+\dot{y}) + x\mathrm{e}^{x}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 3$, $\dot{y}(0) = 1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{y}^2/y + \dot{x}\dot{z}/y$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -5\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2} + y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $x + 2 = z - 1 = 0$ со скоростью -2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси z с произвольной скоростью v и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $-4v$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = -2y$. Укажите три пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения. Являются ли они независимыми?

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы вдоль направления $(-4, 3, 1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^5 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x$, $y' = y - 7t$, $z' = z + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^2 - 7/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 7\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 7

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y}/x^3 + 4\dot{x}^4 + x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 3$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{z}^2 + 2\dot{y}\dot{x}\mathrm{e}^{2z}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -a\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + bx$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $x + 2y = z - 6 = 6$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $-x + z = y = 2$ со скоростью 1 и вращении вокруг оси x с угловой скоростью -4. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} - (-1, 1, 2)t)$. Укажите преобразование, не меняющее вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при движении системы согласно уравнению $x + 3t = 1$, $y = 4 - t$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + 3t$, $y' = y + 6t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 9/x^6$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 8

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}_1{}^2 + q_2\dot{q}_2 + 2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 2$, $\dot{q}_1(0) = 1$, $q_2(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2/x + \dot{y}\dot{z}/x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - a^2\dot{x}^2 - a^2\dot{y}^2} + y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно прямой $x = z = 0$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси z со скоростью 2 и параллельно прямой $2x + y = z = -2$ со скоростью 1. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = eEx + 2mgz$. Укажите два пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно прямой $x + z = y - 1 = 0$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 3\dot{r}^2 + 3r^2\dot{\theta}^2 + 3r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 4\dot{\varphi}\cos\theta$. При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения. $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 2\mathbf{r}/3r$

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + 2t$, $y' = y$, $z' = z + 7t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 1/a^2x^2$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3 - \dot{x}_1U(x_2 - x_3) - \dot{x}_2U(x_1 - x_3) - \dot{x}_3U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 9

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{q}(q\dot{q} + \dot{Q}/q)$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q(0) = 3$, $\dot{q}(0) = 1$, $Q(0) = 1$, $\dot{Q}(0) = 2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $(\dot{z}^2 + \dot{y}\dot{x})/z$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - \dot{q_1}^2 - \dot{q_2}^2} + 6q_1$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $y = 2z - 1 = 0$ со скоростью 1. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси x с произвольной скоростью u и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $u/2$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = \dot{\mathbf{r}}[\mathbf{A}\mathbf{r}]$, $\mathbf{A} = (0, 3, 0)$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси z. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^2/r^2 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x$, $y' = y - 3t$, $z' = z + t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 5\dot{\mathbf{r}}^2 - 3/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 3\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 10

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + x\cos x + 2\dot{x}\dot{z}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}^2/y + 2\dot{x}\dot{z}/y^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 1$, $\dot{z}(0) = 1$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{a^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x - 6y = z - 1 = 1$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $y - 2z = x = 0$ со скоростью 1 и вращении вокруг оси x с угловой скоростью 6. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = 3x\dot{y}$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно направления $(0, -3, -1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^6 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + 4t$, $y' = y$, $z' = z + t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 2/x^4$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 11

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}(\dot{y}/x^3 + \dot{x}) + x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 1$, $\dot{q}_1(0) = 1$, $q_2(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - \dot{q}^2 - \dot{Q}^2} + 7Q$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно прямой $y = z = 0$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси z со скоростью 15 и параллельно прямой $2x + y = z - 2 = 0$ со скоростью 2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = z$. Укажите три пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения. Являются ли они независимыми?

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при движении системы согласно уравнению $y + 4t = -2$, $z = 3 + t$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - 6\dot{\varphi}\cos\theta$. При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения. $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 3\mathbf{r}/r$

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + 2t$, $y' = y + t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 1/a^2x^2$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 12

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = x^2 + 4\dot{x}^2 + x\dot{x}\dot{y}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{9 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $2x = y = 0$ со скоростью 4. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси y с произвольной скоростью $2v$ и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью v (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} + (0, -1, 4)t)$. Укажите преобразование, не меняющее вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно прямой $-y - z = x = 1$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2/r^4 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x$, $y' = y + 4t$, $z' = z + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2 - 5/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 5\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 13

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}\dot{x} + \cos(y+2) + 2\dot{y}^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{y}^2/y + \dot{x}\dot{z}/y$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - 4\dot{x}^2 - 4\dot{y}^2} + x\dot{x} + y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2y + z = x - 1 = 1$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $y = x - 2z = -1$ со скоростью -2 и вращении вокруг оси y с угловой скоростью 1. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = 3eEy + mgz$. Укажите два пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси x. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^8 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x - 10t$, $y' = y$, $z' = z - t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 7/x^8$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3 - \dot{x}_1 U(x_2 - x_3) - \dot{x}_2 U(x_1 - x_3) - \dot{x}_3 U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 14

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{q}\dot{x} + \dot{q}^3 + q\mathrm{e}^q$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 4$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = y\dot{y} + \dot{x}^2/x + \dot{y}\dot{z}/x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}/4 + z$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно прямой $x = y = 0$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси y со скоростью 1 и параллельно прямой $-x + z = y = 0$ со скоростью 4. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = \dot{\mathbf{r}}[\mathbf{A}\mathbf{r}]$, $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы вдоль направления $(2, 1, 1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - 10\dot{\varphi}\cos\theta$. При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения. $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 5\mathbf{r}/r$

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x - t$, $y' = y - 3t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 1/a^2x^2$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 15

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 3(\dot{x_1}^2 + 2x_1\dot{x_1}\dot{x_2})/4$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x_1(0) = 1$, $\dot{x_1}(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x_2}(0) = 2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -4\sqrt{1 - \dot{Q_1}^2 - \dot{Q_2}^2} + 2Q_1$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x + 3y = 5$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси z с произвольной скоростью v и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $-v$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = -5\cos y\dot{z}$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при движении системы согласно уравнению $-3x + 3t = 1$, $y = 4 + t$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^4/r^3 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + t$, $y' = y$, $z' = z + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = m\dot{\mathbf{r}}^2/2 - 7/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 7\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 16

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = x^2 + 4\dot{x}(1 + 2x\dot{y})$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + Cy$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $x + 2 = z = 0$ со скоростью -6. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $z = x + 10y = -5$ со скоростью 2 и вращении вокруг оси z с угловой скоростью -1. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = -5x$. Укажите три пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения. Являются ли они независимыми?

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно прямой $2x + 2y = 3z = -1$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^6/r^6 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x$, $y' = y - 4t$, $z' = z + t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = a^2/x^2$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 17

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = x\dot{x}(\dot{x}+1) + 4\dot{x}\dot{y}/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}\dot{q_3})/q_1$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 1$, $\dot{q_1}(0) = 2$, $q_2(0) = 1$, $\dot{q_2}(0) = 1$, $q_3(0) = 0$, $\dot{q_3}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - 4\dot{Q_1}^2 - 4\dot{Q_2}^2} + Q_2$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно прямой $x = z = 0$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси x со скоростью 1 и параллельно прямой $2x - y = -z = 3$ со скоростью 2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} + (2, -1, 0)t)$. Укажите преобразование, не меняющее вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси y. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^6 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + t$, $y' = y$, $z' = z + 7t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 3\dot{r}^2 + 3r^2\dot{\theta}^2 + 3r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 8\dot{\varphi}\cos\theta$. Проверьте, что величина $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 4\mathbf{r}/3r$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 18

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = z\dot{z} + 2\dot{y}\dot{z} + \sin y + \dot{y}^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{z}^2/z + z\dot{z} + 2\dot{x}\dot{y}/z^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{9 - 4\dot{x}^2 - 4\dot{y}^2} + x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x + 3y = 5$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси x с произвольной скоростью $3v$ и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $-2v$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = 4eEx - mgz$. Укажите два пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно направления $(-1, -1, -1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 5\dot{\mathbf{r}}^4/r^5 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x - 3t$, $y' = y - 3t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2 - 3/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 3\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 19

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2x\cos x + \dot{x}\dot{y}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -2\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + 4y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x - z = y - 7 = 7$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $x = y + 2z = -4$ со скоростью 3 и вращении вокруг оси y с угловой скоростью -2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = \dot{\mathbf{r}}[\mathbf{A}\mathbf{r}]$, $\mathbf{A} = (0, 0, -3)$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при движении системы согласно уравнению $2x + 2t = 1$, $z = 5 - t$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^10 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + t$, $y' = y - t$, $z' = z + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 16/x^4$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 20

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}(\dot{x_1} + \dot{x_2}) + 3x_1 e^{2x_1}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x_1(0) = 1$, $\dot{x_1}(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x_2}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -5\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{z}^2} + x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $x = z + 2 = 0$ со скоростью -4. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси y со скоростью 5 и параллельно прямой $2y - z = x = 0$ со скоростью -2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = -4x\dot{z}$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно прямой $-x + 2y = y = -5$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^6/r^4 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n \mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x + t$, $y' = y - t$, $z' = z$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{r}^2 + 2r^2\dot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 8\dot{\varphi}\cos\theta$. Проверьте, что величина $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 2\mathbf{r}/r$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 21

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^6 + \dot{x}\dot{y}/x^3 + 2x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (5\dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{z} + \dot{x})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -2\sqrt{1 - 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2} + 2x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $2x + 3y = 5$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси y с произвольной скоростью v и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $-5v$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = -10y$. Укажите три пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения. Являются ли они независимыми?

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси z. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 5\dot{\mathbf{r}}^4/r^5 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x' = x$, $y' = y - 3t$, $z' = z + t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 9\dot{\mathbf{r}}^2 - 9/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + 9\mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 22

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = q\dot{q}(\dot{q} + 2q^3) + \dot{q}\dot{Q}/q$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q(0) = 2$, $\dot{q}(0) = 1$, $Q(0) = 0$, $\dot{Q}(0) = 1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2/q_1 + \dot{q_2}\dot{q_3}/q_1^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 1$, $\dot{q_1}(0) = 1$, $q_2(0) = 1$, $\dot{q_2}(0) = 1$, $q_3(0) = 0$, $\dot{q_3}(0) = 1$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{16 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} + y$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $x - y = z + 5 = -5$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $2x = -2y + z = 5$ со скоростью 2 и вращении вокруг оси y с угловой скоростью 1. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} + (-2, 2, 5)t)$. Укажите преобразование, не меняющее вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы вдоль направления $(-2, 7, -1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^8/r^2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x = x' + 2t$, $y = y' - 3t$, $z = z' + 5t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 1/a^2x^4$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 23

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^4 + q\cos q + \dot{q}\dot{Q}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 1$, $Q(0) = 0$, $\dot{Q}(0) = -2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -a\sqrt{1/a^2 - \dot{x}^2 - \dot{q}^2} + x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при движении системы согласно уравнению $-3y + 2t = 1$, $z = 7 - t$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси z со скоростью 7 и параллельно прямой $2z + y = x = 1$ со скоростью 2. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $U = -eEy + 3mgz$. Укажите два пространственных преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при повороте системы относительно оси x. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 6\dot{\mathbf{r}}^4/r^2 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x = x'$, $y = y' - 2t$, $z = z' + 10t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 5\dot{\varphi}\cos\theta$. Проверьте, что величина $\mathbf{I} = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - 5\mathbf{r}/2r$ является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 24

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = x\dot{x}(x+2\dot{x}) + \dot{x}\dot{y}/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 3$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -3\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + 10x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при перемещении системы параллельно прямой $y + 2 = z - 3 = 2$ со скоростью -3. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно оси z с произвольной скоростью $4v$ и вращении вокруг той же оси с угловой скоростью $-8v$ (т.е. движении вдоль винтовой линии). Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = \dot{\mathbf{r}}[\mathbf{A}\mathbf{r}]$, $\mathbf{A} = (-6, 0, 0)$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы параллельно прямой $-2x + y = z = 3$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = 7\dot{\mathbf{r}}^2/r^7 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x = x'$, $y = y' + 7t$, $z = z' - 2t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2 - 1/r$. Проверьте, что величина $\mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] + \mathbf{r}/r$, где $\mathbf{M}$ — момент импульса, является интегралом движения.

Домашнее задание №6

Законы сохранения для систем с несколькими степенями свободы.

Вариант 25

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}(x\dot{x} + \dot{y}/x + x^2)$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 2$, $y(1) = 0$, $\dot{y}(1) = 2$.

2. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}^2/y + \dot{z} + \dot{x}\dot{z}/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

3. Найдите (с точностью до констант интегрирования) закон движения системы, задаваемой функцией Лагранжа $L = -\sqrt{1 - 3\dot{x}^2 - 3\dot{y}^2} + 2x$.

4. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при сдвиге системы параллельно прямой $x - 3y = z + 1 = -1$. Варьируя функцию Лагранжа, найдите величину, сохраняющуюся при движении системы.

5. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при одновременном перемещении параллельно прямой $z = -2x - y = -4$ со скоростью 1 и вращении вокруг оси x с угловой скоростью 7. Варьируя функцию Лагранжа, найдите соответствующий интеграл движения.

6. Частица массой $m = 2$ движется в поле с потенциальной энергией $\Delta L = -7y\dot{z}$. Укажите три преобразования, не меняющих вид действия, и варьированием получите соответствующие интегралы движения.

7. Известно, что вид действия для некоторой системы с функцией Лагранжа $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ не меняется при смещении системы вдоль направления $(-10, -3, 1)$. Используя теорему Нётер, найдите интеграл движения.

8. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^12 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

9. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2$ (свободная частица). Преобразование Галилея $x = x'$, $y = y' - 3t$, $z = z' + 8t$, $t' = t$ не оставляет неизменным вид действия. Тем не менее, такому преобразованию соответствует некий интеграл движения. Найдите его, используя обобщение теоремы Нётер.

10. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2 - U(x_1 - x_2) - U(x_1 - x_3) - U(x_2 - x_3)$, где $U(x) = 1/4x^6$. Проверьте, что величина $I = 2\dot{x_1}\dot{x_2}\dot{x_3} - \dot{x_1}U(x_2 - x_3) - \dot{x_2}U(x_1 - x_3) - \dot{x_3}U(x_1 - x_2)$ является интегралом движения.